

Дәріс сабақтарының негізгі мазмұны

Дәріс №1. Бірнеше айнымалылар функциялары

Бірнеше айнымалылар функциялары туралы негізгі ұғымдар. Біз осы уақытқа дейін жоғарғы математика курсыңда анықталу облысы мен мәндер облысы сандар өсінің кейбір ішкі жиындары болып келген бір айнымалы $y = f(x)$ функциясын қарастырдық.

Бірақ практикада айнымалысы бір аргументтен асатын өзінің зерттеу ерекшеліктері бар функциялар кеңінен қолданылады.

Анықтама. Екі (үш) айнымалы функция деп, анықталу облысы жазықтықтағы (кеңістіктегі) кейбір ішкі жиындар құрайтын, ал мәндер облысы E нақты сандар өсіне жататын, функцияны айтады.

Егер $D \subset Oxy$ жазықтығында ал $E \subset Oz$ өсінде жатса онда екі айнымалы функцияны мына

$$z = f(x, y)$$

түрде жазамыз.

Егер $D \subset Oxyz$, ал $E \subset Oz$, онда үш айнымалы функцияны мына түрде

$$u = f(x, y, z)$$

жазымыз.

Анықтама. Радиусы r -ге тең жазықтықтағы $M(x_0, y_0)$ (немесе кеңістіктегі $M_0(x_0, y_0, z_0)$) нүктесінің аймағы деп центрі M_0 нүктесіндегі радиусы r -ге тең шеңберсіз дөңгелекті (немесе сфераарсыз шарды) айтады.

Мұндай аймақты $U_r(M_0)$ арқылы белгілейміз.

Жазықтықта $U_r(M_0)$ мына теңсіздігімен анықталады:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2,$$

ал кеңістікте – $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2$.

Анықтама. Егер M_0 нүктесінің радиусы r -ге тең кез келген аймағы D жиынымен және оның толықтауыш жиынымен қиылысатын болса, онда M_0 нүктесі D жиынының шекаралық нүктесі деп аталады.

D жиынының барлық шекаралық нүктелері осы жиынның шекарасы деп аталады және $\Gamma(D)$ деп белгіленеді.

Анықтама. $\Gamma(D)$ шекарасын қамтитын D жиынын жабық (тұйық) жиын деп атаймыз. Бірде – бір шекаралық нүктесін қамтымайтын D жиыны ашық жиын деп аталады.

Мысалдар.

1) $U_r(M_0)$ аймағы өз шекарасының бірде – бір нүктесін қамтымайды – шеңберді (немесе сфераны), сондықтан $U_r(M_0)$ – ашық жиын.

2) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ теңсіздігімен жазықтықта берілген дөңгелек өз шекарасын – шеңберді қамтиды:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

сондықтан ол – жабық жиын.

3) Жазықтықтың ширегі мына теңсіздіктермен

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

анықталған және Oy өсіндегі шекаралық бөлігін қамтиды және Ox өсінде шекараның бөлігін қамтымайды. Бұл жиын ашық та, жабық та емес.

C – сан болсын. $z = f(x, y)$ функциясының деңгей сызығы деп, координаталары

$$f(x, y) = C$$

теңдігін қанағаттандыратын D анықталу облысындағы барлық $M(x, y)$ нүктелер жиынын айтамыз.

Осы сияқты географиядағы биіктіктері бірдей сызықтар бейнеленеді. Олар теңіз деңгейінен жергілікті нүктенің биіктігін анықтайтын $z = h(x, y)$ функциясының деңгей сызықтары болады.

Мысал. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

функциясының әртүрлі деңгей сызықтарын табайық. Мұндай сызықтар

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C$$

теңдеуімен анықталады.

$C = 0$ болғанда $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$ аламыз;

$$1 - x^2 - y^2 = 0;$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Сондықтан 0 -дік деңгейде сызық центрі координаталар бас нүктесіндегі радиусы 1 -ге тең шеңбер болады.

$C = \frac{1}{2}$ болғанда аламыз:

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2};$$

$$1 - x^2 - y^2 = \frac{1}{4};$$

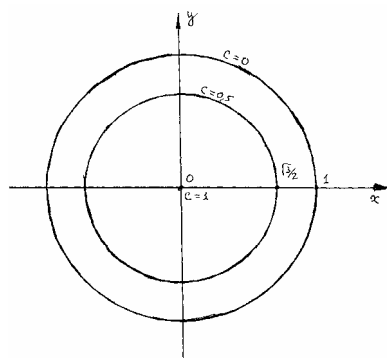
$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}.$$

$C = \frac{1}{2}$ деңгейдегі сызықтық радиусы $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ге тең центрі координаталар бас нүктесіндегі шеңбер болады.

$C = 1$ болғанда

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 1$$

теңдеуі $O(0,0)$ нүктесін, координаталар басын анықтайды (1 сурет)



1 сурет

$C > 1$ және $C < 0$ болғанда $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C$ шешулері болмайды, сондықтан берілген функцияның деңгейлік сызықтары жоқ.

Үш айнымалы функция графигінің орнына келесі ұғымдарды пайдалануға болады.

$u = f(x, y, z)$ функциясының деңгей сызықтары C деп координаталары

$$f(x, y, z) = C.$$

теңдік қанағаттандыратын D анықталу облысының барлық $M(x, y, z)$ нүктелер жиынын айтады.

Мысал. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциясын қараймыз, $C > 0$ болғанда деңгей беттері радиусы $\sqrt{C}$ -ға тең центрі координаталар басында болатын сфералар. $C = 0$ болғанда 0 деңгей беті координаталар басы болады. $C < 0$ бұл функцияның деңгей беттері жоқ.

Бірнеше айнымалы функцияның шегі мен үзіліссіздігі.

Жоғарыда көрсетілген екі – үш айнымалылы функциялардың ұғымдарын n айнымалы жағдайға жалғастырайық.

n айнымалының функциясы

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

деп, анықталу облысы $D \subset R^n$ - ге жататын, ал мәндер облысы нақты өсьте жататын функцияны атайды. Мұндай функциядағы әрбір $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ айнымалылар тобы D -дан алынған, жалғыз y санына сәйкес қояды.

n санды айнымалысы бар функцияның ең жақсы берілу әдісі – аналитикалық әдіс.

Анықтама A саны $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі шегі деп аталады, егер әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $u_\delta(x_0, y_0)$ аймағындағы барлық (x, y) үшін, осы нүктеден басқа, төмендегі теңсіздік

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

орындалатындай $\delta > 0$ саны табылса.

Егер $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі шегі A болса, онда ол мына түрде белгіленеді:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

Бір айнымалы функциялар үшін қарастырылған барлық қасиеттер көп айнымалы функциялар үшін де дұрыс болады.

Анықтама $z = f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер төменгі үш шарт орындалса:

1) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ бар болса,

2) (x_0, y_0) нүктесінде функцияның мәні бар,

3) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функцияның үзіліссіздігін келесі теореманың көмегімен зерттеуге болады.

Теорема Кез келген $z = f(x, y)$ элементар функция өзінің анықталу облысының барлық ішкі нүктелерінде (шеткі нүктелерінде емес) үзіліссіз болады.

Мысал $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Функциясының үзіліссіз болатын барлық нүктелерін табайық.

Бұрын айтқандай, бұл функция жабық

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

дөңгелекте анықталған. Бұл дөңгелектің ішкі нүктелері функцияның ізделінді үзіліссіздік нүктелері, немесе $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функциясы ашық $x^2 + y^2 < 1$ дөңгелекте үзіліссіз.

Дербес өсімшелер мен дербес туынды

Бір айнымалы функциямен салыстырғанда көп айнымалы функцияның өсімшелерінің түрлері көп болады. Бұл жағдайда Oxy жазықтығындағы қозғалыс (x_0, y_0) нүктесінен әртүрлі бағыттарға қарай жүретініне байланысты.

Анықтама $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі x бойынша өсімшесі Δx -ке сәйкес x бойынша дербес өсімшесі деп айтамыз:

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Бұл өсімше, бір айнымалы $z = f(x, y_0)$ функцияның $y = y_0$ тұрақты болғанда $f(x, y)$ функциясының өсімшесі болады.

Сол сияқты $z = f(x, y_0)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі y - бойынша өсімшесі Δy - ке сәйкес y бойынша дербес өсімшесі деп мына айырманы айтамыз:

$$\Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Бұл өсімше $x = x_0$ тұрақты мәнінде есептелінеді.

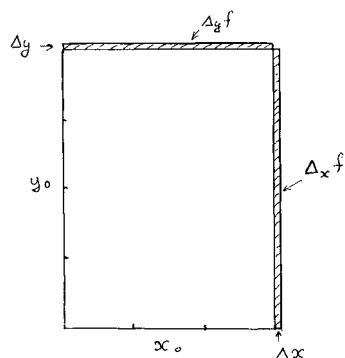
Мысал $f(x, y) = xy$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = \Delta y = 0,1$ болсын.

x, y бойынша функцияның дербес өсімшелерін табайық:

$$\Delta_x f = (x + \Delta x)y_0 - x_0 y_0 = x_0 y_0 + \Delta x y_0 - x_0 y_0 = y_0 \Delta x = 4 \cdot 0,1 = 0,4;$$

$$\Delta_y f = x_0(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 \cdot y_0 + x_0 \Delta y - x_0 y_0 = x_0 \Delta y = 3 \cdot 0,1 = 0,3;$$

Бұл мысалда аргументтердің бірдей өсімшелерінде $\Delta x, \Delta y$, дербес өсімшелер әртүрлі. Бұл тікбұрыштың қабырғалары $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ болатын, x_0 -ді $\Delta x = 0,1$ ге өсіргенде ауданының $\Delta_x f = 0,4$ -ке, ал y_0 қабырғасын $\Delta y = 0,1$ -ге өсіргенде ауданының $\Delta_y f = 0,3$ - ке өсетінін білдіреді. (2 сур. қара).



2 сурет.

Анықтама $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі дербес туындысы деп осы функцияның x бойынша дербес өсімшесінің, осы нүктедегі, x аргументінің өсімшесі Δx - ке қатынасын айтады:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Мұндай дербес туындылар f'_x , z'_x , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ символдарымен белгіленеді. Соңғы жағдайда ∂ - әрпі «дербес» сөзін береді.

Осы (x_0, y_0) нүктесіндегі y бойынша дербес туынды мына

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

шекпен анықталады.

Бұл дербес туындының басқа белгіленулері: z'_y , $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Функциялардың дербес туындысы бір айнымалы функцияның туындыларын табу ережелері бойынша табылады, дифференциалданатын айнымалыдан басқа айнымалалар тұрақты деп есептеледі.

f'_x – табу кезінде y тұрақты деп есептеледі, ал f'_y тапқанда x – тұрақты деп есептеледі.

Мысал $z = x^y$ функциясының дербес туындыларды табайық:

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x$$

Мысал 3 айнымалы функцияның дербес туындыларын табайық:

$$u = xy^2 - z^3.$$

$$u'_x = y^2; \quad u'_y = 2xyz^3; \quad u'_z = 3xy^2 - z^2.$$

$z = f(x, y)$ функциясының дербес туындылары бір айнымалыны уақтша тұрақты деп белгілеп алғандағы функцияның жылдамдығын көрсетеді.

Анықтама $z = f(x, y)$ функциясының дербес туындылары бар болса, онда оның дербес дифференциалдары деп

$$d_x f = f'_x dx, \quad d_y f = f'_y dy.$$

өрнектері аталады, мұндағы $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Екі айнымалы функцияның дербес дифференциалдары осы екі айнымалының біреуін тұрақты деп белгілеп алғандағы бір айнымалы функцияның дифференциалдары болып табылады.

Толық өсімше мен толық дифференциал

Функцияның толық өсімшесінің дербес өсімшелерден айырмашылығы - барлық айнымалылары өзгеріп отыратындығында.

Анықтама $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі аргументтердің $\Delta x, \Delta y$ өсімшелеріне сәйкес толық өсімшесі деп мына айырманы айтады:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (1)$$

Мысал $f(x, y) = xy$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = \Delta y = 0,1$ (алдыңғы мысалды қара). (x_0, y_0) нүктесіндегі толық өсімшені табайық:

$$\begin{aligned} \Delta f &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y - x_0 y_0 = \\ &= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y = 0,3 + 0,4 + 0,01 = 0,71. \end{aligned}$$

Бұл өсімше табандары 3,4 болатын тік төртбұрыштың әр қабырғасын 0,1 - ге өсіргендегі тік төртбұрыштың ауданының өсімшесіне тең.

2 суретте толық Δf өсімшесі екі штрихтелген аудандарына және оған қабырғасы 0,1 - ге тең квадраттың ауданы қосылған.

Анықтама Егер $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі толық өсімшесін

$$\Delta f = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

мұндағы A, B - тұрақты, α, β - шексіз аз $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ жазуға болатын болса, онда

$$df = A \Delta x + B \Delta y$$

функцияның (x_0, y_0) нүктесіндегі толық дифференциалы деп аталады. Толық дифференциалды функция өсімшесін негізгі бөлігі деп атайды.

Белгілі бір нүктеде толық дифференциалы бар функция осы нүктеде дифференциалданатын функция деп аталды.

1 теорема $z = f(x, y)$ функциясы және оның дербес f'_x, f'_y туындыларды (x_0, y_0) нүктесінің кейбір аймағында үзіліссіз болсын. Онда $z = f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде дифференциалданады және оның толық дифференциалы дербес дифференциалдардың қосындысына тең:

$$df = f'_x dx + f'_y dy \quad (2)$$

Дәлелдеуі Толық өсімше Δf – ті былай түрлендірейік:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) =$$

$$(\text{әр айырмаға Лагранж теоремасын қолданайық}) = f'_x(x_c, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_c)\Delta y,$$

мұндағы $x_c \in [x_0, x_0 + \Delta x], y_c \in [y_0, y_0 + \Delta y]$.

$$f'_x, f'_y \text{ үзіліссіздіктерінен } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f'_x(x_c, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) \text{ және}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} f'_y(x_0, y_c) = f'_y(x_0, y_0)$$

шығады. Сондықтан бұл дербес туындыларды мына түрде жазуға болады:

$$f'_x(x_c, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

$$f'_y(x_0, y_c) = f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

$\alpha, \beta - (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ - шексіз аз шамалар.

$$\text{Сондықтан } \Delta f = (f'_x(x_0, y_0) + \alpha)\Delta x + (f'_y(x_0, y_0) + \beta)\Delta y = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

анықтама бойынша $df = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ болады. Сонымен теорема дәлелденді.

Мысал $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциясының толық дифференциалын табыңдар.

Бұл функцияның дербес туындыларын табайық:

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

Бұларды (2) - ге қойсақ, онда мынаны аламыз:

$$\Delta f = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy.$$

Егер (1) формулдағы толық өсімшені толық дифференциалмен ауыстырсақ, онда функцияның жуықтап табу формуласын аламыз:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (3).$$

Мысал $\sqrt{(4,05)^2 + (2,97)^2}$ санды жуықтап есептейік.

Ол үшін $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясының $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктедегі, мұнда $x_0 = 4, \Delta x = 0,05, y_0 = 3, \Delta y = -0,03$, мәнін жуықтап есептейік:

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad f'_x(x_0, y_0) = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5};$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}; \text{ Бұл мәндерді (3) – ке қойып аламыз;}$$

$$\sqrt{(4,05)^2 + (2,97)^2} \approx 5 + \frac{4}{5} \cdot 0,05 + \frac{3}{5}(-0,03) = 5 + 0,04 - 0,018 = 5,022.$$

Ескерту $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ көп айнымалы функциясының толық дифференциалы мына формуламен есептелінеді:

$$dy = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_n} dx_n.$$

Мысал $u = xyz$ 3 айнымалы функцияның толық дифференциалын табайық:

$$u'_x = yz, \quad u'_y = xz, \quad u'_z = xy,$$

онда $du = yzdx + xzdy + xydz$.

Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау

Анықтама $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ функцияларынан құрылған күрделі функция деп екі (x, y) айнымалыларынан тұратын $z = f(u(x, y), v(x, y))$ функцияны айтамыз.

2 теорема $u = u(x, y)$, және $v = v(x, y)$ функцияларының x бойынша (x_0, y_0) нүктесінде x , y бойынша дербес туындылары болсын, ал $z = f(u, v)$ функциясы және оның u мен v бойынша дербес туындылары (u_0, v_0) нүктесінің маңайында үзіліссіз болсын, ал $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Онда күрделі функцияның

$$z = f(u(x, y), v(x, y)) \quad (4)$$

(x_0, y_0) нүктесінде дербес туындылары бар және мына формулалармен табылады:

$$\begin{aligned} z'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x, \\ z'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Дәлелдеуі $\Delta_x u$ және $\Delta_x v$ u , v функцияның (x_0, y_0) нүктесіндегі x аргументінің Δx өсімшесіне сәйкес дербес өсімшелері болсын. Онда 1 теоремаға сәйкес $z = f(u, v)$ функциясының (u_0, v_0) нүктесінде толық дифференциалы болады және оның өсімшесі Δz мына түрде жазылады:

$$\Delta z = f'_u \cdot \Delta_x u + f'_v \cdot \Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v,$$

мұнда α, β $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$ шексіз аз шамалар.

Соңғы теңдіктің екі жағында Δx - ке бөлейік:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_u \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ болса, онда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} &\rightarrow u'_x, \quad \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \rightarrow v'_x, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 0; \\ z'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x \text{ аламыз.} \end{aligned}$$

(5) формуладағы екінші теңдікте осылай дәлелденеді.

Мысал $z = \frac{u}{v}$, $u = e^{x+y}$, $v = \ln(xy)$ осы функциялардан құрылған күрделі

функцияның туындысын табалық

$$z'_x = \left(\frac{u}{v}\right)'_u (e^{x+y})'_x + \left(u/v\right)'_v (\ln(xy))'_x = \frac{1}{v} e^{x+y} - \frac{u}{v^2} \frac{y}{xy} = (u \text{ және } v \text{ мәндерін қойсақ}) =$$

$$= \frac{e^{x+y}}{\ln(xy)} - \frac{e^{x+y}}{x(\ln(xy))^2}.$$

$$z'_y = \left(\frac{u}{v}\right)'_u (e^{x+y})'_y + \left(u/v\right)'_v (\ln(xy))'_y = \frac{1}{v} e^{x+y} - \frac{u}{v^2} \frac{1}{y} = \frac{e^{x+y}}{\ln(xy)} - \frac{e^{x+y}}{y(\ln(xy))^2}.$$

Айталық $z = f(x, y)$ екі айнымалының функциясы және $y = y(x)$ бір айнымалының функциясы берілсін, сонда күрделі

$$z = f(x, y(x))$$

функциясының туындысын толық туынды деп атайды да былай белгілейді

$$dz/dx = f'_x + f'_y \cdot y'_x.$$

Мысал. $z = x^2 + y^2$ және $y = \sin x$ функциясы берілсін. Бұл функцияның x бойынша дербес және толық туындыларын табалық.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x.$$

$$\frac{dz}{dx} = (x^2 + y^2)'_x + (x^2 + y^2)'_y (\sin x)' = 2x + 2y \cos x = 2x + 2 \sin x \cos x.$$

$y = y(x)$ бір айнымалы функциясын мына түрдегі

$$F(x, y) = 0.$$

теңдеу арқылы жазуға болады. Осындай теңдеумен берілген $y = y(x)$ функциясын айқын емес функция деп атайды.

Мысал. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ функциясының графигі радиусы R -ге тең жоғарғы жарты шеңбер болып табылады. Осы функцияны мына айқын емес

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

түрде жазуға болады. Ал бұл функция сонымен қатар

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

функциясын анықтайды.

3. Теорема Айталық (x_0, y_0) нүктесінің маңайында $z = F(x, y)$ функциясы және F'_x , F'_y дербес туындылары үзіліссіз болсын, мұнда $F(x_0, y_0) = 0$ және $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Сонда

$F(x, y) = 0$ теңдеуі x_0 нүктесінің маңайында дифференциалданатын $y = y(x)$ функциясын анықтайды және оның туындысы

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (6)$$

тең.

Мысал. $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ теңдеуімен берілген функцияның y' туындысын табалық.

$$y'_x = -\frac{(x^2 + y^2 - R^2)'_x}{(x^2 + y^2 - R^2)'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Анықтама. $F(x, y, z) = 0$ теңдеуімен берілген $z = z(x, y)$ функциясын екі айнымалының айқын емес функциясы деп атайды.

4. Теорема Айталық (x_0, y_0, z_0) нүктесінің маңайында $u = F(x, y, z)$ функциясы және оның F'_x, F'_y, F'_z дербес туындылары үзіліссіз болсын, мұнда

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ и } F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

сонда

$$F(x, y, z) = 0.$$

теңдеуі (x_0, y_0) нүктесінің маңайында дифференциалданатын $z = z(x, y)$ функциясын анықтайды және оның дербес туындылары

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

тең.

Мысал. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ теңдеуі $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ функциясын анықтайды.

Оның графиктері жарты сфералар. x және y бойынша дербес туындылары төмендегідей болады:

$$z'_x = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z},$$

$$z'_y = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_y}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)'_z} = -\frac{y}{z}.$$

Көп айнымалының бағыт бойынша туындысы және градиенті

$u = u(x, y, z)$ үш айнымалы функциясы берілсін. Осы функцияның $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $\vec{a}_0$ бірлік векторының бағытымен қозғалысының жылдамдығын

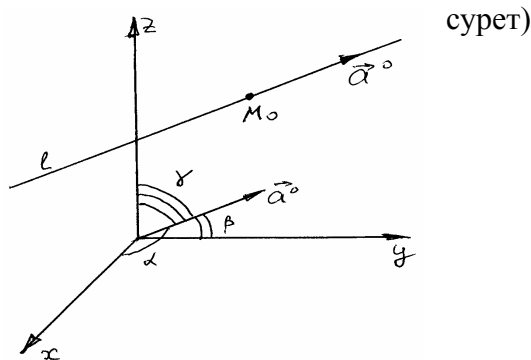
қарастырайық. $\vec{a}_0$ векторын бағыттаушы косинустар арқылы анықтайық:

$\vec{a}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$. Бізге $\vec{a}_0$ векторының бағыттаушысымен берілген M_0 нүктесінен өтетін l түзуі параметрлік теңдеуімен берілсін.

$$l: \begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \\ z = z_0 + t \cos \gamma \end{cases} \quad (1)$$

$\vec{a}_0$ бірлік вектор болғандықтан t параметрінің Δt шамасына өлшемі l түзуінің бойымен ұзындығы $|\Delta t|$ кесіндісіне орын ауыстырғанын білдіреді, ал $t = 0$ болса M_0 нүктесіне сәйкес келеді.

Анықтама. $\vec{a}_0$ векторы бағыты бойынша M_0 нүктесіндегі $u = u(x, y, z)$ функциясының туындысы деп $t = 0$ болғандағы l түзуіндегі t бойынша осы функцияның шектеу туындысын айтады. (3-



3- сурет

Бұл туынды мына $\frac{\partial u}{\partial a_0}$ түрінде белгіленеді.

Егер бұл $\vec{a}_0$ векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базистік векторларының біреуімен сәйкес келсе, онда бұл анықтамаға сәйкес дербес туындыны береді, немесе $\frac{\partial u}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial u}{\partial y},$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Егер $\vec{a}$ бірлік вектор болмаса, онда $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}$ дербес туындысы $\frac{\partial u}{\partial a_0}$ -мен анықталады,

мұндағы $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ бірлік вектор $\vec{a}$ векторына коллинеар.

$u = u(x, y, z)$ функциясының $\vec{a}_0$ векторы бағыты бойынша туындысының формуласын алайық. Ол үшін (1) деп x, y, z -ті u -ға қойсақ:

$$u|_l = u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma), \text{ соңдықтан}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0}(M_0) = (u|_l)'_{|_{l=0}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{M_0} \quad (2)$$

Анықтама $u = f(x, y, z)$ функциясының дербес туындылар-координаталары болатын вектор 2 функцияның градиенті деп аталады және былай белгіленеді:

$$\overrightarrow{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0}$ - ді u градиент арқылы өрнектейтін (2)-ден басқа формуланы аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0} = \overrightarrow{gradu} \cdot \vec{a}_0 \quad (3)$$

Кез келген $\vec{a}$ векторы үшін $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ болғандықтан,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \overrightarrow{gradu} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (4)$$

Егер $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0}$ -ді $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінде есептеу керек болса, онда $\overrightarrow{gradu}$ - да (3), (4)

формулаларымен осы нүктеде есептеу керек болады.

Мысал $u(x, y, z) = xy^2 - 3x^2z + yz^2$ функциясымен берілген дененің $M_0(1; -2; -1)$ нүктесіндегі $\vec{a} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ вектор бағытындағы температура өзгеру жылдамдығын есептеу керек. Ол үшін дербес туындылар мен u өрісінің градиентін табамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= y^2 - 6xz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + z^2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -3x^2 + 2yz; \\ \overrightarrow{gradu} &= (y^2 - 6xz)\vec{i} + (2xy + z^2)\vec{j} + (-3x^2 + 2yz)\vec{k}; \\ \overrightarrow{gradu}(M_0) &= 10\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}. \end{aligned}$$

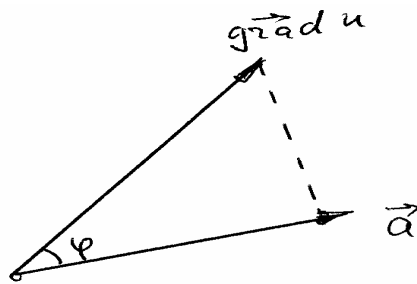
$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + 4^2} = 13$; (4) формула бойынша есептейміз

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}(M_0) = 10 \cdot \frac{12}{13} + 5 \cdot \frac{(-3)}{13} + (-7) \cdot \frac{4}{13} = \frac{77}{13}.$$

Градиенттің қасиеттері

1) u өрісінің градиенті мен $\vec{a}_0$ векторы арасында бұрышы φ деп белгілейік, онда (3) тегі скаляр көбейтіндіні мына $|\overrightarrow{gradu}| |\vec{a}_0| \cos \varphi = |\overrightarrow{gradu}| \cos \varphi$ түрінде жазуға болады, бұл $\overrightarrow{gradu}$ -дың $\vec{a}_0$ векторына проекциясы болады. Демек, $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0} \overrightarrow{gradu}$ векторының $\vec{a}_0$ -ге проекциясымен дәл келеді:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0} = np_{\vec{a}_0} \overrightarrow{gradu} \quad (4 \text{ сурет}) \quad (5)$$



4 сурет

2) (5) формула бойынша $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}_0}$ $\vec{a}$ бағыты бойынша максимал болады, $\overrightarrow{gradu}$ мен дәл келеді, өйткені бұл бағытта $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$. Сондықтан

$$\max_{\vec{a}} \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{gradu}} = |\overrightarrow{gradu}|,$$

градиент функцияның ең үлкен өсу бағытын береді, оның модулі осы бағыттағы туындыға тең.

Скаляр өріс үшін – жергілікті жердің теңіз деңгейінен биіктігі – градиент жергілікті жердің ең үлкен тік көтерілімінің бағытын көрсетеді, ал оның модулі, немесе осы бағыттағы туындысы осы жердің көтерілімінің ең үлкен тангесіне тең. Егер кейбір жердің рельефі $z = u(x, y)$ функциясымен берілсе, онда M_0 нүктесін бастапқы нүкте ретінде алып кез келген бағыттағы осы жердің тіктік көтерілімін есептеп шығаруға болады. Бұл үшін $\overrightarrow{gradu}(M_0)$ -ді тауып және оның бағыттағы проекциясын есептесек болды.

3) $u = u(x, y, z)$ функциясының экстремаль нүктелеріндегі дербес туындылары (егер олар болса) нольге тең, бұл экстремумның қажеттілік шартымен туындайды. Градиенттің барлық координаталары 0 –ге тең нүктелер өрістің сингуляр (айрықша) нүктелері деп аталады. Градиент 0 –ге тең емес нүктелер регуляр нүктелер деп аталады. Географиялық картада төбелер, ойыс жерлер, өткелдер сингуляр да, ал басқа нүктелер регуляр нүктелер болады.

4) $\vec{a} \perp \overrightarrow{gradu}$ векторын алайық. Бұл жағдайда $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = 0$. Градиентке перпендикуляр бағыттағы шексіз аз жылжу мәні тұрақты болып қалады, демек осы бағытта u өрісінің деңгейлік беті өтеді. Келесі теорема орынды.

Теорема. u функциясының кез келген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ регуляр нүктесі арқылы оның деңгейлік бетіне M_0 нүктесі арқылы өтетін жазықтық жүргізуге болады, бұл жазықтық $\overrightarrow{gradu}(M_0)$ -ге перпендикуляр.

Градиенттің осы жазықтыққа нормаль вектор болатынын пайдаланып оның теңдеуін аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (6)$$

Екі айнымалы функция үшін $\overrightarrow{gradu}(M_0)$ осы өрістің деңгей сызығының жанамасына перпендикуляр болады және бұл жанаманың (6) сияқты теңдеуін былай

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = 0 \quad (7)$$

жазуға болады.

5) Градиенттің төменгі алгебралық қасиеттерін айта кетейік.

Егер C – тұрақты болса, онда $\overrightarrow{\text{grad}}C = 0$, $\overrightarrow{\text{grad}}Cu = C\overrightarrow{\text{grad}}u$.

Екі u және v функциясы үшін

$$\overrightarrow{\text{grad}}(u \pm v) = \overrightarrow{\text{grad}}u \pm \overrightarrow{\text{grad}}v, \quad \overrightarrow{\text{grad}}(u \cdot v) = u\overrightarrow{\text{grad}}v + v\overrightarrow{\text{grad}}u.$$

Дифференциалданатын $w = F(u)$ функция үшін:

$$\overrightarrow{\text{grad}}F(u) = F'(u)\overrightarrow{\text{grad}}u.$$

Бұл қасиеттерді өріс пен градиенттің анықтамаларымен оңай дәлелдеуге болады.

Өріс градиентіне, бағыт бойынша туындыға байланысты кейбір мысалдарды алып қарайық.

Мысал. q электр зарядынан пайда болған өрісті қарайық.

$$u = \frac{-q\varepsilon_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\varepsilon_0 - \text{электростатикалық тұрақты}).$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}u = \frac{q\varepsilon_0 x \vec{i}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{q\varepsilon_0 y \vec{j}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{q\varepsilon_0 z \vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (8)$$

Егер (x, y, z) нүктесінің радиус - векторын $\vec{r}$ деп белгілесек, онда $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{r}|$ және градиентті былай жазуға болады:

$$\overrightarrow{\text{grad}}u = \frac{\varepsilon_0 q \vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Біз әрбір нүктедегі градиенттің осы нүктенің радиус – векторына коллинеар екенін көреміз және координаталар басынан бағытталған, оның модулі

$$|\overrightarrow{\text{grad}}u| = \frac{\varepsilon_0 q}{|\vec{r}|^2}$$

координаталар басынан қашықтықтың квадратына кері пропорционал.

Мұнда біз әр нүктедегі градиенттің, осы нүктеден өтетін деңгейлік бетіне - сфераға перпендикуляр екенін көз жеткіземіз. $M(1,1,1)$ нүктедегі өрістің деңгейлік бетіне жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуін табайық. Деңгейлік бетінің теңдеуін табу қажет емес. (8) теңдіктен

$$\overrightarrow{\text{grad}}u(1,1,1) = \frac{q\varepsilon_0}{3^2} \vec{i} + \frac{q\varepsilon_0}{3^2} \vec{j} + \frac{q\varepsilon_0}{3^2} \vec{k}$$

екені шығады және (6) теңдіктен

$$\frac{q\varepsilon_0}{3^2}(x-1) + \frac{q\varepsilon_0}{3^2}(y-1) + \frac{q\varepsilon_0}{3^2}(z-1) = 0 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0$$

Жазықтық радиус - векторға $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ перпендикуляр екені шығады.

Анықтама. $u(x, y, z) = C$ бетінің жанамасына перпендикуляр түзу $M_0(x_0, y_0, z_0)$ жанасу нүктесіндегі осы беттің нормалі деп атайды.

Кез келген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ беттің регуляр нүктесінде нормаль болады және функцияның осы нүктедегі градиентінің бағытында өтеді. Оның параметрлік теңдеулерінің түрі:

$$\begin{cases} x = x_0 + u'_x(M_0)t \\ y = y_0 + u'_y(M_0)t \\ z = z_0 + u'_z(M_0)t \end{cases}$$

Мысал. Эллипстік параболоид $z = x^2 + y^2$ -тің $M_0(1,1,2)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының және нормаль теңдеуін жазу керек.

Бұл теңдеуді $z - x^2 - y^2 = 0$ түрінде жазайық, бұл $u(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ функциясының 0 деңгейлік бетін анықтайды. Осыдан $u'_x = -2x$, $u'_y = -2y$, $u'_z = 1$. Демек, $u'_x(M_0) = -2$, $u'_y(M_0) = -2$, $u'_z(M_0) = 1$. Бұл мәндерді жанама жазықтықтың теңдеуіне қойсақ: $-2(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0$, т.е. $-2x - 2y + z + 2 = 0$ шығады.

Нормаль түзудің параметрлік теңдеуі мына түрде болады:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Жоғарғы ретті туындылар мен дифференциалдар.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының k ретті дербес туындысы деп оның $(k-1)$ ретті кезкелген туындысының дербес туындысын айтамыз.

Бұл рекурренттік анықтама функцияның k ретті дербес туындысын бұл функцияның k дербес туындыларын бірінің артынан бірін табу жолымен табу мүмкіндігін береді. $f(x, y)$ функциясы нөлінші ретті туынды деп есептеледі.

$f(x, y)$ функциясының бірінші ретті f'_x және f'_y туындыларынан x, y бойынша туындылар алып төрт екінші ретті туындылар аламыз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = (f'_x)'_x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = (f'_x)'_y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = (f'_y)'_x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = (f'_y)'_y.$$

Бұлардан x, y бойынша тағы да туындылар алып 3-і ретті 8 дербес туындыларды табамыз. k ретті екі айнымалының 2^k туындысы бар.

Мысал. $z = x^3 + x^2 y + y^3$ - функциясының 1-і, 2-і ретті дербес туындыларын табайық.

$$f'_x = 3x^2 + 2xy, \quad f'_y = x^2 + 3y^2, \quad f''_{xx} = (3x^2 + 2xy)'_x = 6x + 2y, \\ f''_{xy} = (3x^2 + 2xy)'_y = 2x, \quad f''_{yx} = (x^2 + 3y^2)'_x = 2x, \quad f''_{yy} = (x^2 + 3y^2)'_y = 6y.$$

Бұл мысалда $f''_{xy} = f''_{yx}$ және бұл кездейсоқ емес.

Анықтама. Функцияның әртүрлі айнымалыларымен дифференциалдауы бар дербес туындысы аралас туынды деп аталады.

Екі айнымалы функциясының 2-і ретті аралас туындысы f''_{xy} және f''_{yx} болды.

Теорема. Аралас туындылар туралы.

$z = f(x, y)$ функциясы және $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ туындылары (x_0, y_0) нүктесінің кейбір аймағында үзіліссіз болсын. Онда бұл нүктеде оның аралас 2-і ретті туындылары өз ара тең болады:

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Дәлелдеуі. Мына

$A = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)) - (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0))$ өрнекті қарайық.

Егер $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$ деп белгілеп оған Лагранж теоремасын қолдансақ, онда

$A = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \Delta x \varphi'(x_c) = \Delta x (f'_x(x_c, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_c, y_0)) =$ (тағы да Лагранж теоремасын $z = f'_x(x_c, y)$ үшін қолданайық) $= \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_c, y_c).$

Мұнда $x_c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ және $y_c \in [y_0, y_0 + \Delta y]$, егер $\Delta x, \Delta y > 0$ болса.

A -ны басқа түрде жазайық,

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) \text{ деп белгілеп,}$$

Лагранж теоремасы көмегімен аламыз:

$$\begin{aligned} A &= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) - (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \Delta y \psi'(y_d) = \Delta y (f'_y(x_0 + \Delta x, y_d) - f'_y(x_0, y_d)) = \\ &= \Delta y \Delta x f''_{yx}(x_d, y_d). \end{aligned}$$

Мұнда $x_d \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, $y_d \in [y_0, y_0 + \Delta y]$.

A -ның осы екі мәнін теңестіріп аламыз:

$$\Delta x \Delta y f''_{xy}(x_c, y_c) = \Delta x \Delta y f''_{yx}(x_d, y_d); f''_{xy}(x_c, y_c) = f''_{yx}(x_d, y_d)$$

Соңғы теңдеудің екі жағында $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ -ге шекке ұмтылдырып, f''_{xy}, f''_{yx} үзіліссіздігін ескеріп табамыз:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Теорема дәлелденді.

Салдар. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында $z = f(x, y)$ функциясының $(k-1)$ -ге дейінгі барлық дербес туындылары, барлық k ретті аралас туындылары үзіліссіз болсын. Онда бұл нүктеде оның k ретті барлық аралас туындылары, тек дифференциалдау реті өзгеше, өз ара тең болады. Бұл салдар x бойынша m , y бойынша $(k-m)$ дифференциалдары бар белгілеулер қолдануға болады:

$$\frac{\partial^k f}{(\partial x)^m (\partial y)^{k-m}}.$$

Салдардың шарттары орындалғанда дифференциалдау реттері қортындыға әсер етпейді.

Мысал. $f(x, y) = x^3 y^3$ болсын. $\frac{\partial^4 f}{(\partial x)^2 (\partial y)^2}$ табайық.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^3; \quad \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = 6xy^3; \quad \frac{\partial^3 f}{(\partial x)^2 \partial y} = 18xy^2; \quad \frac{\partial^4 f}{(\partial x)^2 (\partial y)^2} = 36xy.$$

Кез келген дифференциалдау реті x, y бойынша екі дифференциалдау кезінде қортынды осындай болады.

Анықтама. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында k ретке дейінгі барлық дербес туындылары бар және үзіліссіз $z = f(x, y)$ функциясы осы нүктеде k рет дифференциалданатын функция деп аталады.

Анықтама. $z = f(x, y)$ x_0 де k рет дифференциалданатын болсын. Осы функцияның k ретті дифференциалы деп, dx, dy - тұрақты болып қалған жағдайда оның $(k-1)$ -і толық дифференциалынан алынған толық дифференциалын айтамыз.

Ол $d^k f$ түрінде белгіленеді.

$$\begin{aligned} \text{Мысалы, } d^2 f &= d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + \\ &+ (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy = f''_{xx} (dx)^2 + f''_{yx} dy dx + f''_{xy} dx dy + f''_{yy} (dy)^2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} (dy)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Осы сияқты 3-ретті толық дифференциалдау формуласын табуға болады.

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{(\partial x)^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{(\partial x)^2 \partial y} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x (\partial y)^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{(\partial y)^3} (dy)^3. \quad (2)$$

Осы толық дифференциалдар формулаларындағы дербес туындылар алдындағы коэффициенттер Ньютон биномындағы коэффициенттермен сәйкес келеді. $z = f(x, y)$ функциясының $d^k f$ -ін табу үшін формула жазайық:

$$d^k f = \frac{\partial^k f}{(\partial x)^k} (dx)^k + k \frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-1} \partial y} (dx)^{k-1} dy + \dots + \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-i} (\partial y)^i} (dx)^{k-i} (dy)^i + \dots + k \frac{\partial^k f}{\partial x (\partial y)^{k-1}} dx (dy)^{k-1} + \frac{\partial^k f}{(\partial y)^k} (dy)^k = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-i} (\partial y)^i} (dx)^{k-i} (dy)^i \quad (3)$$

Бұл толық дифференциалдар $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ функциясын есептеу үшін қолданылады. Бұрын осы формуланы бірінші дифференциалдау көмегімен жуықтап есептеуге қолдандық:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df.$$

Толық дифференциалдардың жеткілікті санын алып берілген мәнді алдын – ала берілген дәлдіктен Тейлор формуласының көмегімен табуға болады:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \dots + \frac{d^k f}{k!}. \quad (4)$$

Мысал. $z = x^3 + y^3 + x^2 y^2$ функциясының $d^2 f$ -ін табайық.

Барлық 2-ші ретті дербес туындыларын табайық:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 + 2xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = \frac{\partial(3x^2 + 2xy^2)}{\partial x} = 6x + 2y^2; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 + 2x^2 y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 2xy^2)}{\partial y} = 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = \frac{\partial(3y^2 + 2x^2 y)}{\partial y} = 6y + 2x^2. \end{aligned}$$

Бұл туындылары (1)-ге қойып аламыз:

$$d^2 f = (6x + 2y^2)(dx)^2 + 8xy dx dy + (6y + 2x^2)(dy)^2.$$

Егер $x_0 = 1, y_0 = 1, dx = dy = 0,1$ болса, онда

$$d^2 f(x_0, y_0) = 8(0,1)^2 + 8(0,1)^2 + 8(0,1)^2 = 0,24.$$

Бірнеше айнымалы функцияның экстремумы.

1. Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ максимум нүктесі деп аталады, егер осы нүктенің $U(M_0)$ маңайдағы барлық (x, y) үшін мына теңсіздік

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

орындалса.

Егер $U(M_0)$ маңайдағы барлық (x, y) үшін мына

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0),$$

орындалса, онда M_0 нүктесі минимум нүктесі деп аталады..

Максимум нүктесіндегі функция мәні $f(x_0, y_0)$ функциясының максимумы деп, ал минимум нүктесіндегі мәні - минимумы деп аталады.

Максимум және минимум нүктелері – функцияның экстремаль нүктелері деп аталады, ал максимумдер мен минимумдер - функцияның экстремумдері деп аталады.

$z = f(x, y)$ функциясы M_0 нүктесінің кейбір аймағында анықталсын. Егер M_0 нүктесінде f'_x , f'_y нольге тең болса, не анықталмаса, онда M_0 нүктесі $z = f(x, y)$ функцияның күдікті (крезистік) нүктесі деп аталады.

Келесі теорема бір айнымалы функцияның экстремумның қажетті шартына ұқсас.

1 теорема (экстремумның қажетті шарты)

Егер $M_0(x_0, y_0)$ $z = f(x, y)$ функциясының экстремаль нүктесі болса, онда M_0 осы функцияның күдікті нүктесі болады.

Дәлелдеуі. Бір айнымалы x – тің функциясын $z = f(x, y_0) = g(x)$ қарайық. Экстремаль нүктенің анықтамасынан M_0 нүктесінің $g(x)$ функциясы үшін экстремаль нүкте болады. Бір айнымалы функцияның экстремумның қажетті шарты бойынша M_0 $g(x)$ –тің күдікті нүктесі екені шығады, немесе

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = \begin{cases} 0 \\ \text{болмайды.} \end{cases}$$

$z = f(x_0, y) = h(y)$ функциясын қарастырып мынаны аламыз:

$$h'(0) = f'_y(x_0, y_0) = \begin{cases} 0 \\ \text{болмайды.} \end{cases}$$

Мысал. $O(0,0)$ нүктесі $z = x^2 + y^2$ функциясының минимум нүктесі болады, себебі $z(0,0) = 0$, ал басқа барлық нүктелерде $z(x, y) > 0$.

$z'_x = 2x$ және $z'_y = 2y$, мына жүйе

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

күдікті $O(0,0)$ нүктені береді.

Мысал. $z = x^2 - y^2$ функциясының $O(0,0)$ нүктесі экстремаль нүктесі болмайды, себебі оның кез келген аймағында функция $z(0,0) = 0$, егер $y = 0$ O -ден үлкен де, ал $x = 0$ болғанда O -ден кіші де мәндер қабылдайды. $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$ болғандықтан

$O(0,0)$ координаталары мына жүйені $\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$,

қанағатандырады, O – күдікті нүкте.

Бұл мысалдан күдікті нүктенің экстремальдық нүкте болмауы да мүмкін.

$z = x^2 - y^2$ гиперболоалық параболоид, бұл функцияның графигінің түрі ертоқымның түрі сияқты, $O(0,0)$ – нүктесі ершік нүкте болады.

2 теорема. (Экстремумның жеткілікті шарттары.)

$z = f(x, y)$ функциясы өзінің күдікті $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің кейбір аймағында 3 рет дифференциалданатын болсын.

$f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, $D = AC - B^2$ деп белгілейік.

Онда:

1) Егер $D > 0$ болса, онда M_0 $z = f(x, y)$ үшін экстремаль нүктесі болады, егер $A > 0$ ($C > 0$) болса, онда бұл – минимум нүктесі, ал егер $A < 0$ ($C < 0$) болса, онда M_0 – максимум нүктесі болады.

2) Егер $D < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ -нүктесінде экстремум жоқ.

$D = 0$ болғанда экстремум табу үшін қосымша зерттеулер қажет. Дәлелдеусіз.

Мысал. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясының экстремаль нүктелерімен экстремумдерін табайық.

$f'_x = 3x^2 - 3y, f'_y = 3y^2 - 3x$ болғандықтан барлық (x, y) үшін, критикалық нүктелерді табу үшін теңдеулер жүйесін шешу керек

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Бұдан екі шешуін аламыз

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ және } \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

және екі $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ күдікті нүктелерді табамыз. Екінші ретті дербес туындыларды тауып және әрбір нүктені экстремумның жеткілікті шарты бойынша зерттейміз.

$$f''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x, \quad f''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3, \quad f''_{yy} = (3y^2 - 3x)'_y = 6y.$$

а) $M_1(0,0)$. Бұл жағдайда:

$$A = f''_{xx}(0,0) = 0; \quad B = f''_{xy}(0,0) = -3; \quad C = f''_{yy}(0,0) = 0; \quad D = AC - B^2 = -9 < 0.$$

Сондықтан M_1 нүктесінде экстремум жоқ.

б) $M_2(1,1)$. Бұл жағдайда:

$$A = f''_{xx}(1,1) = 6; \quad B = f''_{xy}(1,1) = -3; \quad C = f''_{yy}(1,1) = 6; \quad D = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

M_2 экстремаль нүкте. $A, C > 0$ болғандықтан, бұл – минимум нүктесі. M_2 нүктесіндегі функцияның мәні $f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$ - функцияның минимумын береді.